درس اول: معرفی مجموعه

۱

مجموعه

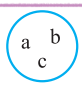
از مجموعه برای نمایش دسته‌ای از اشیا استفاده می‌کنیم که
- مشخص و معین هستند. (اعضا ثابت و غیر قابل تغییر هستند.)
- متمایز (غیرتکراری) هستند.

مثلاً در جدول زیر با نوشتن اعضای عبارت‌های داده‌شده، مجموعه بودن یا نبودن آن‌ها را مشخص کرده‌ایم.

عبارت	اعضا	مشخص‌بودن اعضا	مجموعه‌بودن
دو شاعر ایرانی	فردوسی و سعدی یا حافظ و خیام یا سایه و م. امید یا ...	×	×
اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی	۱,۳,۵,۷,۹	✓	✓
دو عدد طبیعی فرد	۱,۳ یا ۵,۱۱ یا ۷,۱۰۱ یا ...	×	×

۲

نمایش یک مجموعه

نمایش یک مجموعه	شرایط	نحوهٔ نمایش	مثال
نوشتن اعضای مجموعه	تعداد عضوها محدود باشد یا اگر تعداد اعضا بی‌شمار است، طبق الگوی مشخص باشند.	اعضا درون {} (آکولاد) قرار می‌گیرند و بین آن‌ها علامت « , » گذاشته می‌شود.	{۱,۱۰,۴} {۲,۵,۸,...}
نمودار وِن	تعداد اعضا محدود باشد.	اعضا درون منحنی یا خط‌های شکستهٔ بسته نمایش داده می‌شوند.	
به زبان ریاضی	عضوها دارای الگوی مشخص باشند.	در درس دوم به توضیح آن می‌پردازیم.	—

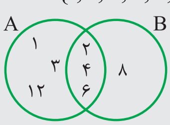
مثال مجموعهٔ A شامل شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ و مجموعهٔ B شامل مضارب طبیعی و یک‌رقمی عدد ۲ را یک بار با نوشتن اعضا و بار دیگر با نمودار ون نمایش دهید.

پاسخ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ برابر با ۱,۲,۳,۴,۶,۱۲ و مضارب طبیعی یک‌رقمی عدد ۲ برابر با ۲,۴,۶,۸ است؛ بنابراین داریم:

نمایش با نوشتن اعضا:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ $\qquad$ $B=\{۲,۴,۶,۸\}$

نمایش با نمودار ون:



چون عضوهای ۲، ۴ و ۸ در هر دو مجموعه قرار دارد، آن‌ها را در وسط قرار داده و درون هر دو حلقهٔ A و B قرار می‌دهیم.

۳

نام‌گذاری مجموعه‌ها

معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی مثل، A، B و C ... نام‌گذاری می‌کنیم.

۴ در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه مهم نیست. مثلاً مجموعهٔ {۱,۲,۳} با مجموعهٔ {۲,۳,۱} یکسان است.

۵ با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود، زیرا همان‌طور که در ابتدا گفتیم اعضای مجموعه باید متمایز باشند؛ بنابراین به جای $\{a,b,b,c\}$ می‌نویسیم $\{a,b,c\}$ و عضو تکراری در مجموعه حذف می‌شود.

عضویت در یک مجموعه

در زبان ریاضی برای این‌که بگوییم یک شیء عضو یک مجموعه است، از نماد «$\in$» و برای این‌که بگوییم عضو مجموعه نیست، از نماد «$\notin$» استفاده می‌کنیم. مثلاً در مجموعهٔ $A = \{a, b, c\}$ $a \in A$ و $d \notin A$.

توجه کنید هر عبارتی که درون یک مجموعه باشد، یک عضو آن مجموعه محسوب می‌شود، مثلاً در مجموعهٔ $A = \{۱, \{۲,۳\}, ۵\}$، $\{۲,۳\}$ عضو A است، اما $\{۵\}$ عضو A نیست.

عین هم هستند.

$A = \{۱, \{۲,۳\}, ۵\} \quad \{۲,۳\} \Rightarrow$ $\{۲,۳\} \in A \Rightarrow \{۲,۳\}$ یک عضو مجموعهٔ A است.

عین هم نیستند.

$A = \{۱, \{۲,۳\}, ۵\} \quad \{۵\} \Rightarrow$ $\{۵\}$ یک عضو مجموعهٔ A نیست.

مثال **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را برای مجموعهٔ $A = \{۲, \{۱\}, \{۲,۳\}\}$ مشخص کنید.**

الف) $۲ \in A$

ب) $\{۲\} \in A$

پ) $۱ \in A$

ت) $\{۱\} \in A$

ث) $۲,۳ \in A$

ج) $\{۲,۳\} \in A$

چ) $\{۳\} \in A$

پاسخ

الف) $A = \{ ۲, \{۱\}, \{۲,۳\}\}$
$۲ \in A$ ← درست.
عین هم هستند.

ب) $A = \{ ۲, \{۱\}, \{۲,۳\}\}$
$\{۲\} \in A$ ← نادرست.
عین هم نیستند.

به طریق مشابه پ) نادرست، ت) درست، ث) نادرست، ج) درست، چ) نادرست.

مجموعهٔ تهی

مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و با نماد $\{\}$ یا $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

۶ در مجموعهٔ تهی، هیچ عبارتی نباید درون آکولاد قرار داشته باشد؛ بنابراین مجموعه‌هایی مانند $\{\{\}\}$، $\{\varnothing\}$ یا $\{۰\}$ تهی نیستند و هر کدام یک عضو دارد.

مثال **مجموعهٔ $\{\varnothing, ۰, \{\varnothing\}, \{\}\}$ چند عضو دارد؟**

۱) ۴ عضو
۲) ۳ عضو
۳) ۲ عضو
۴) این مجموعه تهی است و هیچ عضوی ندارد.

پاسخ گزینهٔ (۲). می‌دانیم $\{\} = \varnothing$ بنابراین یک عضو تکراری حذف می‌شود و مجموعه به صورت $\{\varnothing, ۰, \{\varnothing\}\}$ نوشته می‌شود که دارای ۳ عضو است.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعهٔ برابر: دو مجموعه A و B مساوی هستند، هرگاه هر عضو A ، عضو مجموعهٔ B و هر عضو مجموعهٔ B، عضو مجموعهٔ A باشد. به عبارت دیگر شرط برابری دو مجموعه آن است که:

۱) تعداد عضوهایشان برابر باشد.

۲) اعضایشان کاملاً یکسان باشد.

مثال **در مجموعه‌های A و B، جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که دو مجموعه با هم برابر باشند.**

$$A=\{۵,...,\frac{\sqrt{۱۶}}{-۲^۲},۲^\circ,(-۰/۴)^۲\} \qquad B=\{...,۰/۱۶,-۱,۱,۰\}$$

پاسخ

$$\frac{\sqrt{۱۶}}{-۲^۲}=\frac{۴}{-۴}=-۱ \quad , \quad ۲^\circ=۱ \quad , \quad (-۰/۴)^۲=۰/۱۶$$

چون دو مجموعه مساوی‌اند، پس اعضایشان باید دقیقاً یکسان باشند.

$$A=\{۵,\underline{۰},-۱,۱,۰/۱۶\}$$
$$B=\{\underline{۵},۰/۱۶,-۱,۱,۰\}$$

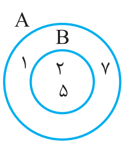
مثال **اگر مجموعهٔ $\{۱۲,m+n\}$ و $\{m-n,۱۵\}$ با هم برابر باشند، مقدار $\frac{m}{n}$ برابر با کدام گزینه است؟** (نمونه‌دولتی ـ شهرستان‌های تهران ـ ۱۴۰۲_۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) ۹ ۳) $-\frac{۱}{۹}$ ۴) -۹

پاسخ گزینهٔ (۲). با توجه به برابری دو مجموعه عضوها نظیربه‌نظیر برابر هستند؛ پس:

$$\begin{cases} m+n=۱۵ \\ m-n=۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۲m=۲۷ \Rightarrow m=\frac{۲۷}{۲} \ , \ n=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{\frac{۲۷}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲۷}{۳}=۹$$

ـ زیرمجموعه ـ اگر هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A است و به صورت $B\subseteq A$ نشان می‌دهیم. مثلاً دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۵,۷\}$ و $B=\{۲,۵\}$ را در نظر بگیرید. چون تمام اعضای مجموعهٔ B عضو مجموعهٔ A است، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A است. $B\subseteq A$



به عبارت دیگر:

شرط استفاده از رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن آن است که:

۱) هر دو طرف علامت $\subseteq$ مجموعه باشند.

۲) تمام اعضای مجموعهٔ سمت چپی در مجموعهٔ سمت راستی وجود داشته باشد.

مثلاً اگر داشته باشیم $A=\{a,b,c,d\}$ نمی‌توانیم بنویسیم $a\subseteq A$، زیرا a یک عضو است؛ برای تبدیل آن به یک مجموعه کافی است آن را داخل آکولاد قرار دهیم، یعنی بنویسیم $\{a\}\subseteq A$.

پس اگر یک یا چند عضو مجموعه‌ای مانند A را داخل آکولاد قرار دهیم یک زیرمجموعه برای A ساخته‌ایم.

۳) اگر بتوانیم عضوی در مجموعهٔ B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم: $B \nsubseteq A$.

۴) هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی اگر A مجموعهٔ دلخواه باشد، $A \subseteq A$.

۵) مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی $\varnothing \subseteq A$.

مثال **اگر $A=\{۱,\{۱,۲\},۳\}$ و $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ ، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.**

الف) $A \subseteq B$

ب) $B \subseteq A$

پ) $۳ \subseteq A$

ت) $\{۱,۲\} \subseteq B$

ث) $\{۱,۲\} \in A$

ج) $\{\{۱,۲\}\} \subseteq A$

پاسخ

الف) درست است؛ زیرا تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B قرار دارد.

$$A=\{۱,\{۱,۲\},۳\} \quad B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\} \Rightarrow A \subseteq B$$

ب) نادرست است؛ زیرا عضو ۲ در مجموعهٔ B قرار دارد، اما در مجموعهٔ A نیست.

$$B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\} \text{ ،} A=\{۱,\{۱,۲\},۳\} \Rightarrow B \nsubseteq A$$

پ) نادرست است؛ زیرا ۳ یک عضو مجموعهٔ A است و برای یک عضو نمی‌توان از رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن استفاده کرد.

ت) درست است؛ زیرا ۱,۲ عضوهای مجموعهٔ B هستند؛ بنابراین $\{۱,۲\} \subseteq B$.

ث) درست است $\{۱,۲\}$ عضو مجموعهٔ A است.

ج) درست است. $\{۱,۲\}$ عضو مجموعهٔ A است و اگر آن را داخل آکولاد بگذاریم تبدیل به مجموعه می‌شود؛ پس می‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد.

$$\{۱,۲\} \in A \xrightarrow{\{\}} \{\{۱,۲\}\} \subseteq A$$

مثال **در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، سه تا از اعضا، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ داده‌شده هستند؟**

۱) $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ ۲) $\{۱,\{۱\},\varnothing\}$ ۳) $\{۱,۲,\{۱\},\{۲\},\varnothing\}$ ۴) $\{\{۲\},\{۱,۲\},\{۱\},\varnothing\}$

پاسخ گزینهٔ (۳)، مجموعهٔ گزینهٔ (۳) را A می‌نامیم؛ داریم:

$$A=\{۱,۲,\{۱\},\{۲\},\varnothing\} \qquad ۱\in A \to \{۱\}\subseteq A \qquad \{۱\}\in A$$

$$A=\{۱,۲,\{۱\},\{۲\},\varnothing\} \qquad ۲\in A \to \{۲\}\subseteq A \qquad \{۲\}\in A$$

$$A=\{۱,۲,\{۱\},\{۲\},\varnothing\} \qquad \varnothing\in A$$

$\varnothing \Rightarrow \varnothing \subseteq A$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

۶) نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه: برای نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، ابتدا مجموعهٔ تهی، سپس مجموعه‌های تک‌عضوی؛ پس آن مجموعه‌های دوعضوی را می‌نویسیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا به خود مجموعه برسیم. مثلاً اگر بخواهیم تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d\}$ را بنویسیم، داریم:

زیرمجموعهٔ تهی	زیرمجموعهٔ تک‌عضوی	زیرمجموعهٔ دوعضوی	زیرمجموعهٔ سه‌عضوی	زیرمجموعهٔ چهارعضوی
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$	$\{a,b\}\ \{a,c\}\ \{a,d\}$ $\{b,c\}\ \{b,d\}$ $\{c,d\}$	$\{a,b,c\}\ \{a,b,d\}\ \{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$	$\underbrace{\{a,b,c,d\}}_{\text{خود مجموعه } A}$

۷) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه: اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آن‌گاه ۲^n زیرمجموعه دارد. مثلاً اگر مجموعه‌ای ۴ عضو داشته باشد، $۲^۴$ یعنی ۱۶ زیرمجموعه دارد.

مثال **اگر سه عضو از اعضای مجموعهٔ A را حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد کم می‌شود. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟**

(نمونه‌دولتی ـ سراسرکشور ـ ۱۴۰۳ـ۱۴۰۲)

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ (۲) اگر مجموعهٔ A، n عضو داشته باشد، ۲^n زیرمجموعه خواهد داشت؛ با توجه به صورت سؤال اگر ۳ عضو از A کم کنیم $(n \to n-۳)$ از تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸تا کم می‌شود $(۲^n \to ۲^n - ۴۴۸)$؛ بنابراین:

$$۲^{n-۳} = ۲^n - ۴۴۸ \xrightarrow{۲^n = ۲^{n-۳+۳}} ۲^{n-۳+۳} - ۲^{n-۳} = ۴۴۸ \xrightarrow{۲^{n-۳+۳} = ۲^{n-۳} \times ۲^۳} ۲^{n-۳}(۲^۳ - ۱) = ۴۴۸$$

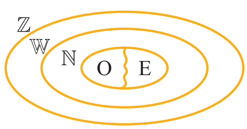
$$۲^{n-۳} \times ۷ = ۴۴۸ \Rightarrow ۲^{n-۳} = \frac{۴۴۸}{۷} \Rightarrow ۲^{n-۳} = ۶۴ = ۲^۶ \Rightarrow n - ۳ = ۶ \Rightarrow n = ۹$$

● توجه کنید در فصل ۴ کتاب توان منفی معرفی می‌شود و یاد می‌گیریم زمانی که توان منفی است، با معکوس‌کردن پایه، می‌توانیم توان را مثبت کنیم. یعنی $۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳}$.

۸) یادآوری مجموعه‌های عددی مهم:

نام مجموعه	علامت اختصاری	اعضای مجموعه
اعداد زوج	E	$\{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\}$
اعداد فرد	O	$\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \ldots\}$
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$\{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$

۹) نمودار ون و رابطهٔ بین مجموعه‌های موجود در جدول، به صورت زیر است:



$O \subseteq \mathbb{N}\ ,\ E \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

۱۰) نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی: در درس اول گفتیم یکی از روش‌های نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است. مثلاً برای نمایش اعداد طبیعی بین ۳− و ۲ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\{\overset{\text{اعدادی مانند x در مجموعه A هستند.}}{x} \underset{\text{به طوری که}}{\mid} \overbrace{\underbrace{\overbrace{x\in\mathbb{N}}^{\text{این اعداد عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.}} \underset{\text{و}}{,} \overbrace{-3<x<2}^{\text{این اعداد بین ۳− و ۲ هستند.}}}_{}}\}\quad \text{شرط‌ها}$$

xها باید هر دو شرط عضو اعداد طبیعی و بین ۳− و ۲ بودن را داشته باشد؛ بنابراین تنها عددی که هر دو شرط را دارد، عدد یک است.

$A=\{1\}$

۱۱) نمایش اعداد زوج و فرد با نمادهای ریاضی به صورت زیر است:

$$E=\{2k\mid k\in\mathbb{N}\}\ ,\ O=\{2k-1\mid k\in\mathbb{N}\}$$

مثال **مجموعه‌های $A=\{x^2-1\mid x\in\mathbb{N},-4\le x<3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{W}\mid x^2\le 5,\frac{x}{2}\in\mathbb{Z}\}$ را با نوشتن عضوهایشان مشخص کنید.**

پاسخ ابتدا باید xهایی که در شرط‌های داده‌شده صدق می‌کنند را پیدا کنیم، سپس آن‌ها را در رابطهٔ جبری داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم.

$$A=\{\overbrace{x^2-1}^{\text{رابطهٔ جبری}} \mid \underbrace{\overbrace{\underbrace{x\in\mathbb{N}}_{\substack{\text{اعداد طبیعی}\\ \{1,2,3,\dots\}}}\ ,\ \underbrace{-4\le x<3}_{\text{تمام اعداد بین ۴− و ۳، خود ۴− هم هست، ولی خود ۳ قابل‌قبول نیست.}}}^{\text{شرط‌ها}}}_{\text{اعدادی که هر دو شرط را دارند: ۱,۲}}\}$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow 1^2-1=0 \\ x=2 \Rightarrow 2^2-1=3 \end{cases} \Rightarrow A=\{0,3\}$$

ابتدا اعدادی که در شرط‌های داده‌شده صدق می‌کنند را پیدا می‌کنیم، سپس از بینشان آن‌ها را که جزء اعداد حسابی‌اند، انتخاب می‌کنیم.

$$B=\{\overbrace{x\in\mathbb{W}}^{\text{اعداد خواسته‌شده}} \mid \underbrace{\overbrace{\underbrace{x^2\le 5}_{\substack{\text{اعدادی که وقتی به توان ۲ می‌رسند،}\\ \text{کوچک‌تر از ۵ یا مساوی ۵ باشند}\\ \downarrow \\ -2\le x\le 2}}\ ,\ \underbrace{\frac{x}{2}\in\mathbb{Z}}_{\substack{\text{اعدادی که وقتی بر ۲ تقسیم می‌شوند،}\\ \text{صحیح باشند. (اعداد زوج و صحیح)}\\ \downarrow \\ \{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}}}}^{\text{شرط‌ها}}}_{\text{اعدادی که هر دو شرط را دارند: ۲,۰,۲−}}\}$$

$$\begin{cases} 0\in\mathbb{W}\Rightarrow 0 \\ 2\in\mathbb{W}\Rightarrow 2 \\ -2\notin\mathbb{W} \end{cases} \Rightarrow B=\{0,2\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا

مجموعه اعدادی هستند، که بتوان آن‌ها به صورت کسری مانند $\frac{a}{b}$ نوشت که در آن a و b هر دو عدد صحیح و $b\ne 0$ است.

۱۲) نمایش مجموعهٔ اعداد گویا: مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توان با نوشتن عضوهایش نمایش داد، زیرا اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست و تنها می‌توان آن را با نمادهای ریاضی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\ne 0\}$$

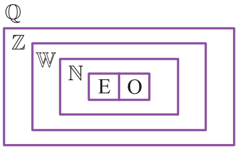
۱۳) هر عدد صحیح، یک عدد گویا است. زیرا برای هر عدد صحیح a داریم:

$$a = \boxed{\dfrac{\overset{\in\mathbb{Z}}{\uparrow}\atop a}{\underset{۱\in\mathbb{Z}\,,\,۱\neq ۰}{\overset{۱}{\downarrow}}}}$$

به صورت کسر است.

بنابراین $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

۱۴) نمودار ون بین مجموعه‌های مهم:



مثال **چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟**

الف) اعداد صحیح، زیرمجموعهٔ اعداد گویا هستند.

ب) هر عدد گویا، یک عدد صحیح است.

پ) $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N}$

ت) $\mathbb{N} \cup \{۰\} = \mathbb{Z}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۱»

الف) درست است. $(\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q})$

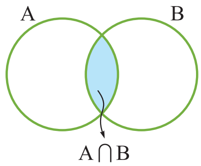
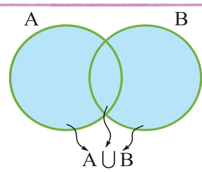
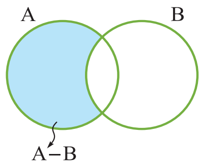
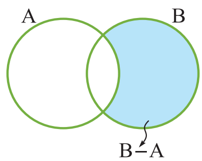
ب) نادرست است. مثلاً عدد $\frac{۵}{۴}$ یک عدد گویا است، اما صحیح نیست.

پ) نادرست است. زیرا $۰ \in \mathbb{W}$ اما $۰ \notin \mathbb{N}$، پس $\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{N}$.

ت) نادرست است. زیرا $\mathbb{N} \cup \{۰\} = \mathbb{W}$.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها (اعمال روی مجموعه‌ها)

۱ اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل را بین دو مجموعه مانند A و B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نوع عمل	علامت اختصاری	نمودار ون	نمایش ریاضی	توضیح
اشتراک دو مجموعه	$\cap$		$A\cap B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\in B\}$	مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است.
اجتماع دو مجموعه	$\cup$		$A\cup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$	مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که یا عضو A، یا عضو B و یا عضو هر دوی آن‌ها است. (حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B است.)
تفاضل دو مجموعه	$-$	 	$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$ $B-A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$	$A-B$ مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو A هستند، اما عضو B نیستند. $B-A$ مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو B هستند، اما عضو A نیستند.

۲

نتایج	برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B
اشتراک هر مجموعهٔ دلخواه با خودش، خودِ مجموعه است.	$A\cap A=A$
اشتراک هر مجموعهٔ دلخواه با مجموعهٔ تهی، مجموعهٔ تهی است.	$A\cap\varnothing=\varnothing$
اشتراک دو مجموعهٔ دلخواه خاصیت جابه‌جایی دارد.	$A\cap B=B\cap A$
اشتراک دو مجموعهٔ دلخواه، زیرمجموعهٔ هر یک از آن‌ها است.	$A\cap B\subseteq A\,,\,A\cap B\subseteq B$
اجتماع هر مجموعهٔ دلخواه با خودش، خود مجموعه است.	$A\cup A=A$
اجتماع هر مجموعهٔ دلخواه با مجموعهٔ تهی، خود مجموعه است.	$A\cup\varnothing=A$
اجتماع دو مجموعهٔ دلخواه، خاصیت جابه‌جایی دارد.	$A\cup B=B\cup A$
هر یک از دو مجموعهٔ دلخواه، زیرمجموعهٔ اجتماع آن‌ها است.	$A\subseteq A\cup B\,,\,B\subseteq A\cup B$
اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.	$A\cap B\subseteq A\cup B$
اگر یک مجموعه زیرمجموعهٔ دیگر باشد، اجتماع آن‌ها برابر با مجموعهٔ بزرگ‌تر و اشتراکشان برابر با مجموعهٔ کوچک‌تر است.	$A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=B\\A\cap B=A\end{cases}$
تفاضل هر مجموعهٔ دلخواه از خودش برابر مجموعهٔ تهی است.	$A-A=\varnothing$
تفاضل دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد.	$A-B\neq B-A$
مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A و مجموعهٔ $B-A$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B است.	$A-B\subseteq A\,,\,B-A\subseteq B$
اگر مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B باشد، A منهای B برابر است با $\varnothing$.	$A\subseteq B\ \Rightarrow\ A-B=\varnothing$

مثال اگر $A=\{x^2 \mid x\in\mathbb{Z},-1\le x<2\}$ و $B=\{3n-2 \mid 2n+1=3n\}$ و $C=\{x \mid x\in\mathbb{N},\frac{10}{x}\in\mathbb{N}\}$ باشد، مطلوب است:

الف) $A\cup B$

ب) $A\cup C$

پ) $A\cap C$

ت) $B-A$

ث) $A-B$

ج) $C-A$

پاسخ ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$A=\{x^2 \mid \underbrace{\overbrace{\underbrace{x\in\mathbb{Z}}_{\text{اعداد صحیح باشند}}\quad ,\quad \underbrace{-1\le x<2}_{\text{اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۱- و کوچک‌تر از ۲ باشند}}}^{\text{شرط‌ها}}}_{-1,0,1}\}$$

اعداد به‌دست‌آمده از شرط‌ها را در رابطهٔ x^2 جای‌گذاری می‌کنیم تا مجموعهٔ A مشخص شود.

$$x^2\begin{cases}x=-1\to 1\\x=0\to 0\\x=1\to 1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A=\{0,1\}$$

$$B=\{3n-2 \mid \overbrace{2n+\underset{\substack{\Downarrow\\ n=1}}{1}=3n}^{\text{شرط}}\}$$

عدد یک به‌دست‌آمده از شرط را در رابطهٔ $۳n-۲$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۳n-۲ \xrightarrow{n=۱} ۱ \Rightarrow B=\{۱\}$$

$$C=\{x \mid \overbrace{\underbrace{x\in\mathbb{N}}_{\text{اعداد طبیعی باشند}} \;,\; \underbrace{\frac{۱۰}{x}\in\mathbb{N}}}^{\text{شرط‌ها}}\}$$

یعنی ۱۰ بر آن عدد بخش‌پذیر است. $\Leftarrow$ اگر ۱۰ را بر آن اعداد تقسیم کنیم حاصل عددی طبیعی باشد

۱,۲,۵,۱۰

$$x=\begin{cases}۱\\۲\\۵\\۱۰\end{cases} \Rightarrow C=\{۱,۲,۵,۱۰\}$$

۱ را قبلاً نوشتیم

الف) $A\cup B=\{۰,۱\}\cup\{\;۱\;\}=\{۰,۱\}$

۱ را قبلاً نوشتیم

ب) $A\cup C=\{۰,۱\}\cup\{۱,۲,۵,۱۰\}=\{۰,۱,۲,۵,۱۰\}$

پ) $A\cap C=\{۰,۱\}\cap\{۱,۲,۵,۱۰\}=\{۱\}$

ت) $B-A=\{\cancel{۱}\}-\{۰,۱\}=\{\}$

ث) $A-B=\{۰,\cancel{۱}\}-\{۱\}=\{۰\}$

ج) $C-A=\{\cancel{۱},۲,۵,۱۰\}-\{۰,۱\}=\{۲,۵,۱۰\}$

مثال اگر $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid \sqrt{x}\le ۴\,,\,\sqrt{x}\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{۲x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ باشد، در این صورت $A\cap B$ چند عضو دارد؟ (نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۱۴۰۱–۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$A=\{\underbrace{x\in\mathbb{Z}}_{\text{اعداد صحیح}} \mid \overset{\text{شرط اول}}{\underbrace{\sqrt{x}\le ۴}_{۰\le x\le ۱۶}}\,,\,\overset{\text{شرط دوم}}{\underbrace{\sqrt{x}\in\mathbb{N}}}\}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=۱\\ \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴\\ \sqrt{x}=۳ \Rightarrow x=۹\\ \sqrt{x}=۴ \Rightarrow x=۱۶\\ \sqrt{x}=۵ \Rightarrow x=۲۵\\ \vdots\end{cases}$$

اشتراک شرط اول و دوم $\Rightarrow x=۱,۴,۹,۱۶ \xrightarrow{\text{همگی جزء اعداد صحیح‌اند.}} A=\{۱,۴,۹,۱۶\}$

$$B=\{۲x \mid \overset{\text{شرط}}{\underbrace{x\in\mathbb{Z}}_{\text{اعداد صحیح}}}\}$$

$\downarrow$

$...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,...$

اگر اعداد $...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...$ را در رابطهٔ $۲x$ جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$B=\{...,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,...\}$$

$$\Rightarrow A\cap B=\{۴,۱۶\}$$

مثال اگر $A \subseteq B \cup A$ و $A=\{x^2 \mid x\in\mathbb{Z}, x^4<17\}$ باشد، مجموعهٔ B چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (نمونه‌دولتی ـ قزوین ـ ۱۴۰۲-۱۴۰۱)

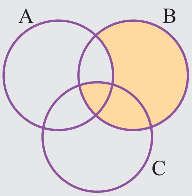
۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$A=\{\underbrace{x^2}_{x^2=4,1,0\ \Rightarrow\ A=\{0,1,4\}} \mid \underbrace{\underbrace{x\in\mathbb{Z}}_{\text{اعداد صحیح باشند}} , \underbrace{x^4<17}_{\text{اعدادی که وقتی به توان ۴ می‌رسند، کم‌تر از ۱۷ باشند}}}_{x=-2,-1,0,1,2}\}$$

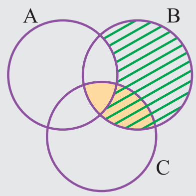
از طرفی، چون $A \subseteq B \cup A$ پس $A \subseteq B$. با توجه به این‌که تعداد زیرمجموعه‌های A برابر است با $8 = 2^3$؛ پس مجموعهٔ B، ۸ حالت می‌تواند داشته باشد.

مثال کدام گزینه قسمت رنگی را نشان می‌دهد؟ (نمونه‌دولتی ـ اصفهان ـ ۱۴۰۲-۱۴۰۱)



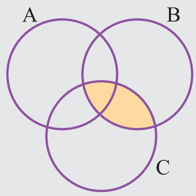
۱) $(B\cap C)\cup(B-A)$ ۲) $C-(A\cap B)$ ۳) $(A\cup B)-(B\cap C)$ ۴) $A\cap(B\cup C)$

پاسخ گزینهٔ «۱»

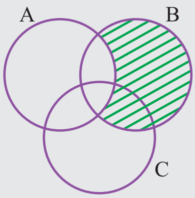


$(B\cap C)\cup(B-A)$

$\Leftarrow$



$B\cap C$



$B-A$

۱۵) نمایش تعداد عضوهای یک مجموعه:

تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر مجموعهٔ A، ۳ عضو داشته باشد، آن‌گاه $n(A)=3$.

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

۱ برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{احتمال رخ دادن پیشامد A}} = \frac{\overbrace{n(A)}^{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}}{\underbrace{n(S)}_{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}}$$

مثال **تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال رخ‌دادن هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.**

الف) عدد روشده زوج باشد.

ب) عدد روشده کوچک‌تر از ۳ باشد.

پاسخ

الف)

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

پیشامد زوج‌بودن $A = \{۲, ۴, ۶\} \Rightarrow n(A) = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب)

پیشامد کوچک‌تر از ۳ بودن $= \{۱, ۲\} \Rightarrow n(B) = ۲ \Rightarrow P(B) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

۲ پیشامدی که احتمال وقوع آن یک باشد را پیشامد قطعی می‌نامیم. یعنی حتماً اتفاق می‌افتد.

۳ پیشامدی که احتمال وقوع آن صفر باشد را پیشامد غیرممکن می‌نامیم، یعنی هرگز اتفاق نمی‌افتد.

۴ احتمال رخ‌دادن هر پیشامد دلخواه مانند A، بین صفر تا یک یا خود صفر و یا خود یک است. ($۰ \le P(A) \le ۱$)

نکته

برای تعیین تعداد حالت‌ها، اگر چند عمل هم‌زمان انجام شود، تعداد حالت‌های هر کدام را به دست آورده و آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثلاً اگر یک تاس و یک سکه را پرتاب کنیم، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\text{تعداد حالت‌های پرتاب یک تاس}}_{\text{اعداد روی تاس} \left\{\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}\right. \Rightarrow \text{۶ حالت}} \times \underbrace{\text{تعداد حالت‌های پرتاب یک سکه}}_{\left\{\begin{matrix}\text{رو}\\\text{پشت}\end{matrix}\right. \Rightarrow \text{۲ حالت}} = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

نکته

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

مثال **اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، چه‌قدر احتمال دارد این خانواده دارای دو پسر (یعنی دقیقاً دو پسر) باشد؟**

پاسخ

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \underbrace{\text{تعداد حالت‌های فرزند اول}}_{\underbrace{\text{دختر یا پسر}}_{\text{۲ حالت}}} \times \underbrace{\text{تعداد حالت‌های فرزند دوم}}_{\underbrace{\text{دختر یا پسر}}_{\text{۲ حالت}}} \times \underbrace{\text{تعداد حالت‌های فرزند سوم}}_{\underbrace{\text{دختر یا پسر}}_{\text{۲ حالت}}} = ۲\times۲\times۲ = ۸ \text{ حالت}$$

اگر خانواده دقیقاً دو پسر داشته باشد، ممکن است حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

$$\underbrace{\text{فرزند اول و سوم پسر و فرزند دوم دختر}}_{\underbrace{\text{(پ,د,پ)}}_{\text{۱حالت}}} \text{ یا } \underbrace{\text{فرزند اول دختر و فرزند دوم و سوم پسر}}_{\underbrace{\text{(د,پ,پ)}}_{\text{۱حالت}}} \text{ یا } \underbrace{\text{فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم دختر}}_{\underbrace{\text{(پ,پ,د)}}_{\text{۱حالت}}} = ۱+۱+۱ = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۸}$$

مثال **احتمال این‌که در پرتاب هم‌زمان دو تاس یکی از اعداد روشده بزرگ‌تر از دیگری باشد، چه‌قدر است؟** *(نمونه دولتی ـ اردبیل و آذربایجان غربی ـ ۱۴۰۲-۱۴۰۱)*

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳۶}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \text{تعداد حالت‌های تاس اول} \times \text{تعداد حالت‌های تاس دوم} = ۶\times۶ = ۳۶$$

برای به دست آوردن تعداد حالت‌هایی که یکی از اعداد روشده در دو تاس از دیگری بزرگ‌تر باشد، کافی است از کل حالت‌ها، آن‌هایی که اعداد دو تاس برابر هستند را خارج کنیم. یعنی حالت‌های (۱,۱)،(۲,۲)،(۳,۳)،(۴,۴)،(۵,۵)و(۶,۶) را حذف کنیم.

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۳۶-۶ = ۳۰ \Rightarrow P = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

مثال **در پرتاب هم‌زمان ۲ تاس، مجموع دو عدد روشده را x می‌نامیم. احتمال آمدن کدام مقدار برای x کم‌تر است؟** *(نمونه دولتی ـ البرز ـ ۱۴۰۲ – ۱۴۰۱)*

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ «۴»

می‌دانیم مجموع دو عدد روشده برای دو تاس، حداکثر می‌تواند ۱۲ باشد. (وقتی هر دو تاس ۶ بیایند.) پس ممکن نیست که مجموع دو تاس ۱۳ باشد؛ یعنی احتمال وقوع آن صفر است. با توجه به این‌که $۰ \le P(A) \le ۱$، پس کم‌ترین مقدار احتمال صفر است که مربوط به گزینهٔ (۴) می‌باشد.

مثال **سه تاس را هم‌زمان می‌اندازیم. چه‌قدر احتمال دارد حداقل دو بار عدد پنج بیاید؟** (نمونه‌های دولتی ـ سراسر کشور ـ ۱۴۰۳-۱۴۰۲)

۱) $\frac{۲}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۶}{۲۱۶}$

پاسخ گزینه «۳»

می‌دانیم تعداد حالت‌های پرتاب یک تاس برابر ۶ است. چون در این‌جا سه تاس را پرتاب کرده‌ایم، تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با $n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۱۶$.

احتمال این‌که حداقل دو بار عدد ۵ بیاید، یعنی یا دو تاس عدد ۵ و تاس دیگر عددی غیر ۵ بیاید یا این‌که هر سه تاس عدد ۵ بیاید.

تاس اول و دوم ۵ و تاس سوم غیر ۵ بیاید: $(۵,۵,\begin{cases}۱\\۲\\۳\\۴\\۶\end{cases}) \Rightarrow$ ۵ حالت

یا   +

تاس اول و سوم ۵ و تاس دوم غیر ۵ بیاید: $(۵,\begin{cases}۱\\۲\\۳\\۴\\۶\end{cases},۵) \Rightarrow$ ۵ حالت

یا   +

تاس دوم و سوم ۵ و تاس اول غیر ۵ بیاید: $(\begin{cases}۱\\۲\\۳\\۴\\۶\end{cases},۵,۵) \Rightarrow$ ۵ حالت

یا   +

هر سه تاس عدد ۵ بیاید: $(۵,۵,۵) \Rightarrow$ ۱ حالت.

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌های مطلوب $= ۱۶ \Rightarrow P = \frac{۱۶}{۲۱۶}$

فصل دوم: عددهای حقیقی

درس اول: عددهای گویا

۱ **پیداکردن یک عدد گویا بین دو عدد گویای دیگر**: اگر بخواهیم بین دو عدد گویای دلخواه مثل $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۵}$ عددی گویا انتخاب کنیم، به یکی از سه روش زیر عمل می‌کنیم.

شماره	روش	توضیح	مثال
۱	میانگین‌گیری	دو عدد گویای داده‌شده را با یکدیگر جمع، سپس تقسیم بر ۲ می‌کنیم.	$\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}}{۲}=\frac{\frac{۷}{۱۰}}{۲}=\boxed{\frac{۷}{۲۰}} \Rightarrow \frac{۱}{۵}<\frac{۷}{۲۰}<\frac{۱}{۲}$
۲	جمع‌کردن صورت‌ها و مخرج‌های دو عدد گویا	صورت کسرها را با هم و مخرج کسرها را نیز با هم جمع می‌کنیم.	$\frac{۱+۱}{۲+۵}=\boxed{\frac{۲}{۷}} \Rightarrow \frac{۱}{۵}<\frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}$
۳	مخرج‌مشترک‌گیری	بین دو کسر مخرج‌مشترک می‌گیریم، سپس بین کسرهای ایجادشده، عدد گویا می‌نویسیم.	$\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{۲}{۱۰},\frac{۵}{۱۰}$ حال یک کسر با مخرج ۱۰ و صورت یک عدد دلخواه بین ۲ و ۵ می‌نویسیم، مثلاً $\boxed{\frac{۳}{۱۰}}$ $\frac{۱}{۵}<\frac{۳}{۱۰}<\frac{۱}{۲}$

۲ **در روش اول و دوم با تکرار دستور گفته‌شده بین عدد گویای کوچک‌تر و عدد گویای به‌دست‌آمده یا عدد گویای بزرگ‌تر و عدد گویای به‌دست‌آمده، می‌توان مجدداً عدد گویا پیدا کرد و این کار را تا بی‌نهایت تکرار کرد.**

۳

نکته

در روش سوم اگر نتوانیم به تعداد خواسته‌شده مثلاً n تا عدد گویا انتخاب کنیم، باید صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد $n+۱$ ضرب کنیم.

۴ با توجه به مطالب گفته‌شده می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد. به همین دلیل مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توان با نوشتن عضوهایش نمایش داد، چون بین هر دو عضو، بی‌شمار عضو دیگر وجود دارد.

مثال بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ سه عدد گویا با روش مخرج‌مشترک‌گیری پیدا کنید.

پاسخ

$$\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{۲}{۶},\frac{۳}{۶}$$

بین دو عددی که در صورت کسرها هستند، یعنی ۲ و ۳ نمی‌توان سه عدد صحیح انتخاب کرد، پس طبق نکتهٔ گفته‌شده عمل می‌کنیم.

۳ کسر خواسته شده است. $\Rightarrow n=۳ \Rightarrow n+۱=۴ \xrightarrow[\text{کسر را در ۴ ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج هر دو}} \frac{۲\times۴}{۶\times۴},\frac{۳\times۴}{۶\times۴} \Rightarrow \frac{۸}{۲۴},\frac{۱۲}{۲۴}$

حال بین دو عدد ۸ و ۱۲ به تعداد خواسته‌شده عدد صحیح داریم. بنابراین:

$$\frac{۸}{۲۴}<\frac{۹}{۲۴}<\frac{۱۰}{۲۴}<\frac{۱۱}{۲۴}<\frac{۱۲}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{۳}<\frac{۳}{۸}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۱۱}{۲۴}<\frac{۱}{۲}$$

۵ **نمایش اعشاری اعداد گویا**: اگر صورت یک کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم، نمایش اعشاری آن به دست می‌آید.

مثلاً نمایش اعشاری $\frac{۱}{۲}$ برابر ۰/۵ یا نمایش اعشاری $\frac{۱}{۳}$ برابر با ....۰/۳۳۳ است.

۶ دسته‌بندی نمایش اعشاری اعداد گویا:

نمایش اعشاری اعداد گویا

۱) مختوم یا متناهی: در نمایش اعشاری این اعداد، رقم‌های اعشار مشخص و تعداد آن متناهی است. یعنی ارقام اعشار آن تمام می‌شود. مثل: $\frac{۵}{۸} = ۰/\underbrace{۶۲۵}_{\text{۳رقم اعشار}}$

۲) متناوب: در نمایش اعشاری این اعداد، ارقام اعشار نامتناهی هستند. یعنی ارقام اعشار تمام نمی‌شوند، اما به طور متناوب تکرار می‌شوند.

۱) متناوب ساده: رقم‌های تکرارشونده، بلافاصله بعد از ممیز هستند.

مثال: $\frac{۲}{۱۱} = ۰/\underbrace{۱۸۱۸۱۸}_{\text{عدد ۱۸ بلافاصله بعد از ممیز تکرار می‌شود}}\underbrace{...}_{\text{ارقام اعشار تمام نمی‌شوند}}$

۲) متناوب مرکب: ابتدا یک یا چند رقم غیرتکراری بعد از ممیز می‌آید، سپس رقم‌های تکرارشونده می‌آیند.

مثال: $\frac{۱}{۶} = ۰/\underbrace{۱}_{\text{رقم غیرتکراری}}\underbrace{۶۶۶}_{\text{عدد ۶ تکرار می‌شود}}\underbrace{...}_{\text{ارقام اعشار تمام نمی‌شوند}}$

۷ برای خلاصه‌نویسی اعداد متناوب، به جای تکرار، آن رقم (رقم‌ها) را یک بار نوشته و از علامت «ـ» روی آن استفاده می‌کنیم. مثلاً $۰/\overline{۵} = ۰/۵۵۵۵...$ یا $۰/۴۲\overline{۷} = ۰/۴۲۷۷۷$ این علامت را دورهٔ گردش یا دورهٔ تناوب می‌خوانیم.

۸ تشخیص عدد گویا بدون نوشتن نمایش اعشاری آن: ابتدا صورت و مخرج عدد گویا را تا حد ممکن ساده می‌کنیم. حال داریم:

عدد گویای مختوم (متناهی)	عدد گویای متناوب ساده	عدد گویای متناوب مرکب
در مخرج فقط عامل‌های اول ۲ و ۵ وجود دارد.	در مخرج فقط عوامل اول به‌جز ۲ و ۵ وجود دارد.	در مخرج علاوه بر عامل‌های اول ۲ یا ۵، عامل‌های اول دیگری هم وجود دارد.
مثلاً: $\frac{۱}{۵}, \frac{۳}{\underbrace{۲۰}_{۲^۲\times۵}}, \frac{۴}{\underbrace{۲۵}_{۵^۲}}$	مثلاً: $\frac{۳}{۱۱}, \frac{۴}{\underbrace{۷۷}_{۷\times۱۱}}, \frac{۱}{\underbrace{۹}_{۳^۲}}$	مثلاً: $\frac{۱}{\underbrace{۶}_{۲\times۳}}, \frac{۲}{\underbrace{۳۵}_{۷\times۵}}, \frac{۷}{\underbrace{۳۰}_{۲\times۳\times۵}}$

مثال درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (امتحان هماهنگ کشوری ـ خرداد ۱۴۰۳ ـ نوبت صبح)

کسر $\frac{۳}{۴}$، دارای نمایش اعشاری مختوم است. درست ☐ نادرست ☐

پاسخ درست است؛ مخرج کسر به صورت $۲^۲$ است، یعنی فقط عامل ۲ را دارد، پس مختوم است.

مثال اگر کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{a}{۳۰}$ مولد عدد اعشاری مختوم باشد، چه‌قدر احتمال دارد که a مضرب ۵ باشد؟ (نمونه دولتی ـ شهرستان‌های تهران ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۲۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ گزینهٔ «۴» ـ اگر مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم، داریم $۵\times۳\times۲=۳۰$، چون این کسر مولد عدد اعشاری مختوم است، پس نباید در مخرج عامل اولی به جز ۲ و ۵ وجود داشته باشد. این نشان می‌دهد صورت کسر حتماً مضرب ۳ بوده که توانسته است ۳ مخرج را حذف کند. بنابراین:

$$a\in S=\underbrace{\{۳,۶,۹,...,۲۷\}}_{\text{مضرب۳،کوچک‌تراز ۳۰}} \Rightarrow n(S)=۹$$

پس فضای نمونه، ۹ عضو دارد. حال پیشامد مطلوب این است که a مضرب ۵ باشد؛ در بین اعداد مورد قبول برای a، فقط ۱۵ مضرب ۵ است؛ یعنی فقط یک حالت مطلوب داریم.

$$A=\{۱۵\} \Rightarrow n(A)=۱$$

در نتیجه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۹}$

۹ یادآوری مقایسهٔ کسرها

صورت‌ها برابر باشند	مخرج‌ها برابر باشند	نه صورت ها برابر باشند، نه مخرج‌ها
کسری بزرگ‌تر است که مخرج کوچک‌تری دارد.	کسری بزرگ‌تر است که صورت بزرگ‌تر دارد.	ابتدا مخرج مشترک دو کسر را محاسبه کرده و کسرها را بازنویسی می‌کنیم و با برابری مخرج‌ها، کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال کسرهای داده‌شده را به ترتیب از کوچک به بزرگ مشخص کنید.

$$\frac{۳}{۵},-\frac{۱۰}{۳},\frac{۵}{۸},-۳/۲۵,\frac{۴۷}{۱۳},۳\frac{۳}{۴}$$

پاسخ ابتدا از اعداد منفی شروع می‌کنیم. برای مقایسهٔ راحت‌تر، عدد کسری را به اعشار تبدیل می‌کنیم:

$$-\frac{۱۰}{۳}\simeq-۳/۳۳ \Rightarrow -۳/۳۳<-۳/۲۵ \Rightarrow \boxed{-\frac{۱۰}{۳}<-۳/۲۵}$$

در اعداد مثبت، ابتدا سراغ کسرهای کوچک‌تر از واحد یعنی $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۸}$ می‌رویم.

$$\frac{۵}{۸},\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌گیری}}\frac{۲۵}{۴۰},\frac{۲۴}{۴۰}\Rightarrow\frac{۲۴}{۴۰}<\frac{۲۵}{۴۰}\Rightarrow\boxed{\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۸}}$$

بین دو عدد بزرگ‌تر از واحد هم داریم:

$$\frac{۴۷}{۱۳}=۳\frac{۸}{۱۳}\Rightarrow ۳\frac{۸}{۱۳},۳\frac{۳}{۴}\xrightarrow[\text{درنظرنمی‌گیریم}]{\text{قسمت‌های‌صحیح‌برابرند، آن‌ها را}}\frac{۸}{۱۳},\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}}\frac{۳۲}{۵۲},\frac{۳۹}{۵۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳۲}{۵۲}<\frac{۳۹}{۵۲}\Rightarrow\frac{۸}{۱۳}<\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۳\frac{۸}{۱۳}<۳\frac{۳}{۴}\Rightarrow\boxed{\frac{۴۷}{۱۳}<۳\frac{۳}{۴}}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱۰}{۳}<-۳/۲۵<\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۸}<\frac{۴۷}{۱۳}<۳\frac{۳}{۴}$$

۱۰ یادآوری ترتیب عملیات‌های ریاضی:

۱) پرانتز (اگر چند پرانتز تو در تو داشتیم، از داخلی‌ترین پرانتز شروع می‌کنیم.)

۲) توان و جذر

۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست)

۴) جمع و تفریق

مثال حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$-۲(۱۵-(۴-۲^{۳})۲)^{۲}\div ۲\times\frac{۱}{۲}$$

پاسخ

$$-۲(۱۵-\underbrace{(۴-۲^{۳})^{۲}}_{\underbrace{(۴-۸)^{۲}}_{\underbrace{(-۴)^{۲}}_{۱۶}}})^{۲}\div ۲\times\frac{۱}{۲}=-۲\underbrace{(۱۵-۱۶)^{۲}}_{\underbrace{(-۱)^{۲}}_{۱}}\div ۲\times\frac{۱}{۲}=\underbrace{-۲(۱)}_{-۲}\div ۲\times\frac{۱}{۲}=\underbrace{-۲\div ۲}_{-۱}\times\frac{۱}{۲}$$

$$=-۱\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۱ کسرهای مسلسل: کسرهایی را که در مخرج‌ها یک عبارت به طور مداوم تکرار می‌شود، کسر مسلسل می‌گوییم. برای به دست آوردن حاصل این کسرها، از آخرین کسر موجود در مخرج شروع می‌کنیم.

مثال حاصل کسر مقابل در کدام گزینه آمده است؟ (نمونه دولتی ـ تهران ـ ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰)

$$\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}}}}$$

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۱۳}$

پاسخ گزینهٔ «۴»: از آخرین کسر موجود در مخرج شروع می‌کنیم و حاصل آن را به دست آورده و جواب را جایگزین می‌کنیم.

$$\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\underbrace{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}}_{A}}}}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\underbrace{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۲}{۳}}}_{B}}}=\cfrac{۱}{\underbrace{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۳}{۵}}}_{C}}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۵}{۸}}=\cfrac{۱}{\cfrac{۱۳}{۸}}=\frac{۸}{۱۳}$$

$$A=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}=\cfrac{۱}{\cfrac{۳}{۲}}=۱\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$B=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۲}{۳}}=\cfrac{۱}{\cfrac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۵}$$

$$C=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۳}{۵}}=\cfrac{۱}{\cfrac{۸}{۵}}=\frac{۵}{۸}$$

درس دوم: عددهای حقیقی

۱ اعداد گنگ

نام	ویژگی‌ها	علامت اختصاری مجموعه اعداد	مثال
اعداد گنگ یا اصم	۱) در نمایش اعشاری آن‌ها تعداد ارقام اعشاری انتها ندارد. (نامتناهی است) ۲) ارقام اعشار دارای دورهٔ تناوب نیستند.	$\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$	۰/۳۲۷۱۵۴۰۱..... ۰/۰۴۰۰۴۰۰۰۴.....

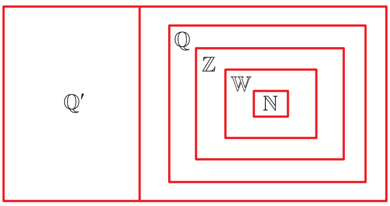
۲ تشخیص عددهای گنگ بدون نوشتن نمایش اعشاری آن‌ها: اگر n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است. مثلاً $\sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۵}, \sqrt{۶}$ و ... گنگ هستند. همچنین عدد π نیز گنگ است. ما معمولاً دو رقم اول اعشار عدد π را می‌نویسیم، ولی در حقیقت ارقام اعشار آن نامتناهی و بدون تناوب است.

۳ برخی از دانش‌آموزان به اشتباه فکر می‌کنند که هر عدد رادیکالی گنگ است، در صورتی که گفتیم اگر عدد زیر رادیکال $(\sqrt{\ })$ مربع کامل نباشد، یعنی اگر جواب جذر دقیق نباشد، آن عدد گنگ است. پس اعدادی مانند $\sqrt{۱} = ۱$ ، $\sqrt{۴} = ۲$ ، $\sqrt{۰/۳۶} = ۰/۶$ ، $-\sqrt{\frac{۸۱}{۱۶}} = -\frac{۹}{۴}$ گنگ نیستند (گویا هستند)؛ زیرا جواب جذر به طور دقیق معلوم است.

۴ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$. یعنی یک عدد نمی‌تواند هم گنگ باشد هم گویا؛ زیرا فرض کنید یک عدد دلخواه انتخاب کرده‌ایم، داریم:

عدد دلخواه	**نمایش اعشاری آن متناهی است**	**عدد گویا است** $\xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $\frac{۱}{۲} = ۰/۵, -۴, ۲$
	نمایش اعشاری آن نامتناهی و دارای تناوب است	**عدد گویا است** $\xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $\frac{۲}{۵۵} = ۰/۰\overline{۳۶}, \frac{۱}{۳} = ۰/\overline{۳}$
	نمایش اعشاری آن نامتناهی است و دورهٔ تناوب ندارد	**عدد گنگ است** $\xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵...$

۵ نمودار ون برای مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$:



مثال چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}} \in \mathbb{Q}'$ 　 ب) $-۴ \in \mathbb{Q}$ 　 پ) $\sqrt{۲/۵} \in \mathbb{Q}'$ 　 ت) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{N}$

ث) عددی وجود دارد که طبیعی و گویا باشد. 　 ج) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۱) ۱ 　 ۲) ۲ 　 ۳) ۳ 　 ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۳»

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست است.

$$\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳۲}{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴ \notin \mathbb{Q}'$$

ب) درست است. $-۴ \in \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس $-۴ \in \mathbb{Q}$

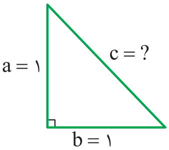
پ) درست است. $۲/۵$ مربع کامل نیست، پس $\sqrt{۲/۵} \in \mathbb{Q}'$

ت) نادرست است. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

ث) درست است. زیرا $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. بنابراین تمام اعداد طبیعی، گویا هم هستند.

ج) نادرست است. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

۶ نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد: از آن‌جا که مقدار دقیق اعداد گنگ مشخص نیست، نمی‌توان مانند اعداد گویا محل دقیق آن‌ها را روی محور به راحتی مشخص کرد. برای نمایش آن‌ها از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$ رسم می‌کنیم. برای این منظور مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که طول اضلاع قائمه‌اش هر کدام یک باشد، حال با توجه به قضیهٔ فیثاغورس طول وتر این مثلث $\sqrt{۲}$ خواهد بود.

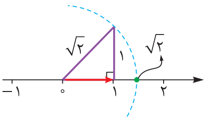


قضیهٔ فیثاغورس: $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} \Rightarrow c^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} \Rightarrow c^{۲} = ۲ \Rightarrow c = \sqrt{۲}$

به این ترتیب برای به دست آوردن سایر اعداد گنگ، سعی می‌کنیم دو عدد پیدا کنیم که مجموع مربعات آن‌ها برابر با عدد زیر رادیکال شود. سپس یکی از اعداد را برای یک ضلع قائمه و دیگری را برای ضلع قائمهٔ دیگر در نظر می‌گیریم. گاهی ممکن است این کار را چند بار انجام دهیم تا به عدد مورد نظر برسیم.

مثلاً برای نمایش $\sqrt{۲}$ روی محور اعداد داریم:

ابتدا دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع مربعات آن‌ها برابر ۲ باشد. این دو عدد ۱ و ۱ هستند.



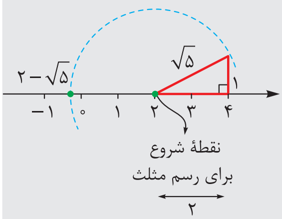
$(۲ = ۱^{۲} + ۱^{۲})$ حال روی محور اعداد از نقطهٔ صفر، یک واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم و از آن‌جا یک واحد به طور عمود بالا می‌رویم. سپس وتر مثلث که طول آن $\sqrt{۲}$ خواهد بود را رسم می‌کنیم. پس از آن سوزن پرگار را روی نقطهٔ صفر گذاشته و دهانه را به اندازهٔ وتر باز کرده و یک کمان در جهت مثبت محور می‌زنیم (اگر عدد داده‌شده منفی بود، کمان را در جهت منفی محور می‌زدیم) محل برخورد کمان با محور اعداد نشانگر عدد $\sqrt{۲}$ است.

مثال اعداد الف) $\sqrt{۵} - ۲$ و ب) $\sqrt{۶} - ۱$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

پاسخ الف) ابتدا در محور اعداد روی عدد ۲+ قرار می‌گیریم، حال باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع مربع‌های آن‌ها برابر با ۵ باشد. آن دو عدد ۱ و ۲ هستند.

$(۱^{۲} + ۲^{۲} = ۵)$

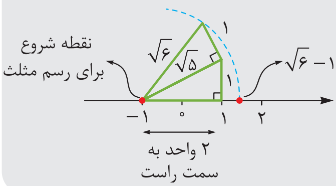
سپس یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائمهٔ ۲ و ۱ از نقطهٔ ۲+ رسم می‌کنیم.



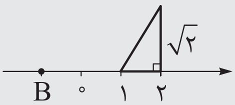
حال سوزن پرگار را روی نقطهٔ ۲ گذاشته، دهانه را به اندازهٔ وتر باز کرده و یک کمان در جهت منفی محور xها می‌زنیم. (به دلیل منفی‌بودن عدد) محل برخورد با محور اعداد، نشان‌دهندهٔ عدد $۲ - \sqrt{۵}$ است.

ب) ابتدا در محور اعداد روی عدد ۱− قرار می‌گیریم. حال باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع مربع‌های آن‌ها برابر با ۶ شود. چون این کار با اعداد صحیح امکان‌پذیر نیست، از یک عدد رادیکالی و یک عدد صحیح استفاده می‌کنیم. $(۱^{۲} + (\sqrt{۵})^{۲} = ۶)$

پس یک ضلع مثلث باید $\sqrt{۵}$ و ضلع دیگر ۱ باشد. برای رسیدن به طول $\sqrt{۵}$ باید ابتدا مراحل قسمت (الف) را انجام دهیم و بر روی وتر ایجادشده به طول $\sqrt{۵}$ یک ضلع قائمه به طول یک وارد می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر ایجاد شود. طول وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ دوم $\sqrt{۶}$ خواهد بود.



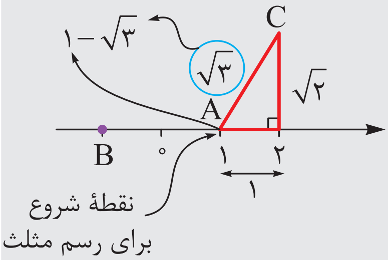
مثال **روی محور مقابل به مرکز A و به شعاع AC کمان زده‌ایم تا محور را در نقطهٔ B قطع کند. نقطهٔ B چه عددی را نمایش می‌دهد؟** (نمونه دولتی ـ یزد ـ ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)



۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۶}$

۳) $۱-\sqrt{۶}$ ۴) $۱-\sqrt{۲}$

پاسخ گزینهٔ (۱)



۷ پیداکردن مقدار تقریبی اعداد گنگ: برای این‌که بدانیم یک عدد گنگ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد، باید یک عدد مربع کامل قبل و یکی بعد از عدد زیر رادیکال پیدا کنیم. سپس از آن دو عدد جذر بگیریم.

مثلاً برای این‌که بدانیم $\sqrt{۱۹}$ بین کدام دو عدد صحیح است، داریم:

$$\underset{}{۱۶<\overset{\text{عدد زیر رادیکال}}{۱۹}<۲۵} \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{۱۶}<\sqrt{۱۹}<\sqrt{۲۵} \Rightarrow ۴<\sqrt{۱۹}<۵$$

۸ پیداکردن یک عدد گنگ بین دو عدد گنگ یا گویا: برای پیداکردن یک عدد گنگ بین عدد گنگ دیگر مثلاً $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۰}$ می‌توانیم جذر هر عدد دلخواه بین ۸ و ۱۰ را که مربع کامل نباشد، بنویسیم. پس اعدادی مانند $\sqrt{۸/۴}, \sqrt{۸/۲}, \sqrt{۸/۵۲}, \sqrt{۹/۷}$ و... همگی اعداد گنگ بین $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۰}$ هستند.

توجه کنید اگر یک یا هر دو عدد داده‌شده گویا بود (بدون رادیکال بود)، برای پیداکردن اعداد گنگ بین آن‌ها کافی است اعداد داده‌شده را به توان ۲ برسانیم و زیر رادیکال ببریم. سپس مطابق قسمت قبل عمل کنیم. مثلاً برای پیداکردن اعداد گنگ بین ۲ و ۳ داریم:

$$\underset{\sqrt{۴}}{۲} < \text{اعداد گنگ ؟} < \underset{\sqrt{۹}}{۳} \Rightarrow \text{اعداد گنگ} = \sqrt{۴/۱}, \sqrt{۴/۲}, \dots, \sqrt{۵}, \sqrt{۶}, \sqrt{۷/۸}, \dots$$

۹

نکته

بین هر دو گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. به طور کلی بین هر دو عدد دلخواه، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. به همین دلیل نمی‌توانیم مجموعه اعداد گنگ را با نوشتن اعضایش مشخص کنیم.

مثال **بزرگ‌ترین عدد طبیعی کوچک‌تر از $۵\sqrt{۲}-۳$ برابر با کدام گزینه است؟** (نمونه دولتی ـ شهرستان‌های تهران ـ ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینه «۲» ــ روش اول: در فصل هفتم ریاضی هشتم یاد گرفتیم $\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$، از طرفی $۴۹<۵۰<۶۴$ پس $۸>\sqrt{۵۰}>۷$، حال با توجه به این‌که از عدد $۵\sqrt{۲}$، ۳ واحد کم شده است، از عددهای ۷ و ۸ هم، ۳ واحد کم می‌کنیم یعنی $۵>۵\sqrt{۲}-۳>۴$.

بنابراین ۴ بزرگ‌ترین عدد طبیعی است که از $۵\sqrt{۲}-۳$ کوچک‌تر است.

روش دوم: $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴\dots \Rightarrow \sqrt{۲}>۱/۴ \xrightarrow{\times ۵} ۵\sqrt{۲}>۷ \xrightarrow{-۳} ۵\sqrt{۲}-۳>۴$

۱۰ تأثیر عملیات‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بر عبارت‌های گنگ و گویا:

می‌خواهیم بدانیم اگر اعضای دو مجموعهٔ گویا و گنگ را با خود یا دیگری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کنیم، عضویت آن‌ها در مجموعه‌ها چگونه خواهد بود.

عملیات / مجموعه‌ها	$\times$	$\div$	$+$	$-$
$\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q},\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $۳\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}'$ $۰\times\sqrt{۲}=۰\in\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\in\mathbb{Q}'$ $\frac{۰}{\sqrt{۵}}=۰\in\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۳}+۲\in\mathbb{Q}'$ $-\sqrt{۳}+۴\in\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۳}-۲\in\mathbb{Q}'$ $۶-\sqrt{۷}\in\mathbb{Q}'$
$\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۶}\in\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲\in\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\in\mathbb{Q}'$ $\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴\in\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\in\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۵}-\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}'$ $\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰\in\mathbb{Q}$

مثال **کدام یک از جملات زیر درست است؟** (نمونه دولتی ـ خوزستان ـ ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰)

۱) مجذور هر عدد گنگ، عددی گویا است.

۲) اگر عدد a گویا و عدد b گنگ باشد، $\frac{a}{b}$ همواره گنگ است.

۳) میانگین دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) $۲/۵<۲/۵$

پاسخ گزینهٔ (۴)

گزینهٔ (۱) نادرست است، مثلاً اگر عدد گنگ مورد نظر $\sqrt{\sqrt{۲}}$ باشد، مجذور آن $\sqrt{۲}$ است که همچنان یک عدد گنگ است.

گزینهٔ (۲) نادرست است. مثلاً اگر $a=۰$ و $b=\sqrt{۲}$، آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{۰}{\sqrt{۲}}=۰\in\mathbb{Q}$

گزینهٔ (۳) نادرست است. اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{میانگین}=\frac{-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۲}=۰\in\mathbb{Q}$$

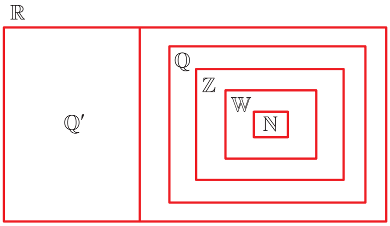
گزینهٔ (۴) درست است. زیرا $۲/۵=۲/۵۰$ و $۲/\overline{۵}=۲/۵۵\ldots$،

$$\underbrace{۲/۵۰\square ۲/۵۵\ldots}_{<} \Rightarrow ۲/۵<۲/\overline{۵}$$

۱۱ اعداد حقیقی:

نام	ویژگی‌ها	علامت اختصاری مجموعه اعداد	مثال
اعداد حقیقی	از اجتماع مجموعه اعداد گویا و گنگ به وجود می‌آید.	$\mathbb{R}$	$-۲,۰,۵,\frac{۱}{۲}$ $\frac{۲}{۱۱},\sqrt{۵},\pi,\ldots$

۱۲ نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا و گنگ و حقیقی



$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

مثال **اگر x و y اعدادی گنگ باشند، کدام گزینه درست است؟** (نمونه دولتی ـ اصفهان ـ ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)

۱) $x+y \in \mathbb{Q}'$ ۲) $xy \in \mathbb{R}$ ۳) $x-y \in \mathbb{Q}'$ ۴) $xy^{۲} \in \mathbb{Q}'$

پاسخ گزینهٔ (۲)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) نادرست است. فرض می‌کنیم $x=\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}'$ و $y=-\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}'$، در این صورت داریم:

$$x+y=\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰ \in \mathbb{Q}$$

گزینهٔ (۲) درست است. حاصل‌ضرب دو عدد گنگ می‌تواند گنگ یا گویا باشد که در هر صورت عضوی از اعداد حقیقی است.

$$x \in \mathbb{Q}'\ ,\ y \in \mathbb{Q}' \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب}} \begin{cases} xy \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \\ \text{یا} \\ xy \in \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$$

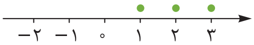
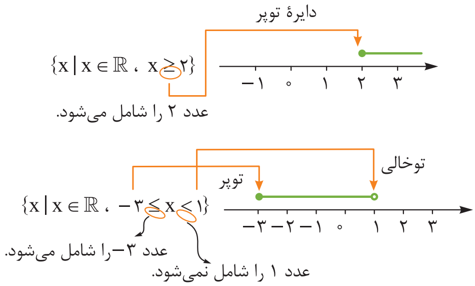
گزینهٔ (۳) نادرست است. اگر $x=\sqrt{۳} \in \mathbb{Q}'$ و $y=\sqrt{۳} \in \mathbb{Q}'$؛ در این صورت داریم:

$$x-y=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۰ \in \mathbb{Q}$$

گزینهٔ (۴) نادرست است. اگر $x=\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}'$ و $y=\sqrt{\sqrt{۲}} \in \mathbb{Q}'$؛ در این صورت داریم:

$$xy^{۲}=\sqrt{۲}\times(\sqrt{\sqrt{۲}})^{۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲ \in \mathbb{Q}$$

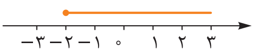
۱۳ نمایش اعداد به زبان ریاضی و روی محور اعداد: فرض می‌کنیم می‌خواهیم مجموعه‌ای مانند $\{x \mid x \in \square, ...\}$ را روی محور نمایش دهیم. داریم:

$\square$	طریقهٔ نمایش روی محور اعداد	مثال
$\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$	اعداد مورد نظر برای مجموعه را مشخص کرده و روی محور، بالای اعداد مورد نظر دایرهٔ توپر می‌کشیم.	$\{x \mid x \in \mathbb{N}, -۲ \le x \le ۳\} = \{۱,۲,۳\}$ 
$\mathbb{R}$	با توجه به این‌که مجموعهٔ $\mathbb{R}$ شامل تمام اعداد روی محور می‌شود، روی محور یک خط ممتد در قسمت خواسته‌شده می‌کشیم.	
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$	قابل نمایش روی محور نیست؛ زیرا بین هر دو عدد گویا (گنگ) بی‌شمار عدد گویا (گنگ) وجود دارد.	قابل نمایش روی محور نیست. $\{x \mid x \in \mathbb{Q} \mid -۱ < x < ۱\}$

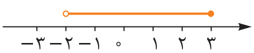
مثال **الف) مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -۲\}$ را روی محور نمایش دهید.** (امتحان هماهنگ کشوری ـ خرداد ۱۴۰۳ ـ نوبت عصر)

ب) مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x \le ۳\}$ را روی محور اعداد نمایش دهید. (امتحان هماهنگ استانی ـ البرز ـ ۱۴۰۲)

پاسخ الف) A شامل اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲− است. پس یک خط می‌کشیم که از ۲− شروع می‌شود و به سمت مثبت محور xها ادامه می‌یابد. توجه کنید چون عدد ۲− در مجموعه قرار دارد، در ابتدای خط روی عدد ۲− دایرهٔ توپر رسم می‌کنیم.



ب) این مجموعه شامل عددهای حقیقی بین ۲− و ۳ است. پس یک خط از ۲− تا ۳ رسم می‌کنیم. عدد ۲− در مجموعه قرار ندارد پس در ابتدای خط روی عدد ۲− دایرهٔ توخالی می‌کشیم و چون عدد ۳ در مجموعه وجود دارد، در انتهای خط روی عدد ۳ دایرهٔ توپر می‌کشیم.



مثال **با توجه به مجموعهٔ** $A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,-۱<x<۱\}$ **کدام گزینه درست است؟** (نمونه دولتی ـ خوزستان ـ ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{۰/۱۶}\notin A$

۲) از نمایش اعضای A روی محور، یک پاره‌خط به وجود می‌آید.

۳) $A\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

۴) صفر تنها عدد حسابی در مجموعهٔ A است.

پاسخ گزینهٔ (۴)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) نادرست است. زیرا: $\sqrt{۰/۱۶}=۰/۴\in\mathbb{Q}\ ,\ -۱<۰/۴<۱\Rightarrow\sqrt{۰/۱۶}\in A$

گزینهٔ (۲) نادرست است. اعداد گویای بین ۱- و ۱ قابل نمایش روی محور نیستند. اگر یک خط بکشیم، بی‌شمار عدد گنگ هم داخل مجموعهٔ A می‌شود.

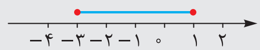
گزینهٔ (۳) نادرست است. اجتماع اعداد گویای بین ۱- و ۱ با اعداد گنگ برابر با کل اعداد حقیقی نخواهد شد.

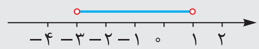
گزینهٔ (۴) درست است. مجموعهٔ اعداد حسابی برابر است با $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,...\}$ که از بین آن‌ها فقط صفر در مجموعهٔ A وجود دارد.

مثال **نمودار مجموعهٔ** $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۳\le x\le ۱\}$ **کدام است؟** (نمونه دولتی ـ البرز و قزوین ـ ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰)

۱)


۲)


۳)


۴)


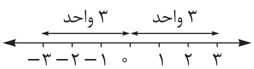
پاسخ گزینهٔ (۱)

A مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۳- تا ۱ است، به طوری که خود ۱ و ۳- را هم شامل می‌شود. این اعداد برابرند با $-۳,-۲,-۱,۰,۱$ که روی محور، بالای این اعداد دایره‌های توپر رسم می‌کنیم.

درس سوم: قدرمطلق و محاسبهٔ تقریبی

۱ تعریف قدرمطلق: فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، قدرمطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم، مثلاً فاصلهٔ نقطهٔ ۳ از صفر و فاصلهٔ نقطهٔ ۳- از صفر، هر دو برابر با ۳ واحد است.

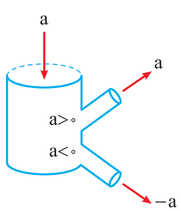
بنابراین قدرمطلق هر دو عدد ۳ و ۳- برابر ۳ است؛ یعنی $|-۳|=|۳|=۳$



۲ تعریف ریاضی قدرمطلق: فرض می‌کنیم a یک عدد دلخواه باشد، در این صورت $|a|$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

علامت a	$a\ge ۰$	$a<۰$
حاصل قدرمطلق a	$\|a\|=a$	$\|a\|=-a$
مثال	$a=۳\Rightarrow\|a\|=۳$ $a=۰\Rightarrow\|a\|=۰$	$a=-۲\Rightarrow\|a\|=-(-۲)=۲$ $a=-۵\Rightarrow\|a\|=-(-۵)=۵$

پس قدرمطلق روی اعداد مثبت یا صفر هیچ تغییری ایجاد نمی‌کند، اما اعداد منفی را قرینه می‌کند.



۳ برای محاسبهٔ عبارت‌های شامل قدرمطلق، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می‌کنیم. (اگر عدد رادیکالی داشتیم، کافی است مقدار تقریبی آن را بدانیم) حال داریم:

علامت عبارت داخل قدرمطلق	+ یا ۰	−
حاصل قدرمطلق	قدرمطلق را برداشته و خود عبارت داخل قدرمطلق را بدون تغییر می‌نویسیم.	قدرمطلق را برداشته و کل عبارت داخل قدرمطلق را در منفی ضرب می‌کنیم. (قرینه می‌کنیم)
مثال	$\lvert ۵-\sqrt{۳}\rvert = \underbrace{۵-\sqrt{۳}}$ مقدار تقریبی $۵-۱/۷$ علامت + خود عبارت داخل قدرمطلق را می‌نویسیم.	$\lvert\sqrt{۳}-۲\rvert = -\underbrace{(\sqrt{۳}-۲)} = ۲-\sqrt{۳}$ مقدار تقریبی $۱/۷-۲$ علامت − کل عبارت داخل قدرمطلق را در منفی ضرب می‌کنیم.

۴ برای تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق می‌توانیم به جای این‌که مقدار تقریبی رادیکال را در نظر بگیریم، عدد صحیح را به توان ۲ رسانده و زیر رادیکال ببریم، سپس با مقایسهٔ اعداد زیر رادیکال‌ها، تشخیص دهیم که کدام‌یک بزرگ‌تر است، مثلاً:

$$|\sqrt{۱۱}-۴| = -\underbrace{(\sqrt{۱۱}-۴)} = -\sqrt{۱۱}+۴$$

$\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۶}$

عددبزرگ‌تر

علامت

−

مثال **عبارت زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.** (امتحان هماهنگ ـ بوشهر ـ ۱۴۰۲)

$$|\sqrt{۵}-۳|+|-\sqrt{۵}|$$

پاسخ

$$|\sqrt{۵}-۳| = -\underbrace{(\sqrt{۵}-۳)} = -\sqrt{۵}+۳$$

مقدارتقریبی

$۲/۲-۳$

علامت

−

$$|-\sqrt{۵}| = -\underbrace{(-\sqrt{۵})} = \sqrt{۵}$$

علامت

−

$$\Rightarrow |\sqrt{۵}-۳|+|-\sqrt{۵}| = -\cancel{\sqrt{۵}}+۳+\cancel{\sqrt{۵}} = ۳$$

۵ هرگاه عددی مانند a مثبت یا صفر باشد $(a \geq ۰)$، می‌گوییم a نامنفی است (یعنی a منفی نیست، پس یا مثبت است یا (صفر)؛ همچنین اگر منفی یا صفر باشد $(a \leq ۰)$، می‌گوییم a نامثبت است. (یعنی a مثبت نیست، پس یا منفی است یا صفر)

اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، داریم:

$$\begin{cases} ۱)\ a>۰, b>۰ \Rightarrow \begin{cases} a+b>۰ \Rightarrow |a+b| = a+b \\ ab>۰ \Rightarrow |ab| = ab \end{cases} \\ ۲)\ a<۰, b>۰ \Rightarrow ab<۰ \Rightarrow |ab| = -ab \\ ۳)\ a<۰, b<۰ \Rightarrow \begin{cases} a+b<۰ \Rightarrow |a+b| = -(a+b) \\ ab>۰ \Rightarrow |ab| = ab \end{cases} \end{cases}$$

۶ برخی از خواص قدرمطلق

بیان ویژگی به صورت کلامی	بیان ویژگی به زبان ریاضی	مثال
۱) قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، مساوی حاصل‌ضرب قدرمطلقِ آن‌هاست.	$\lvert x\times y\rvert=\lvert x\rvert\times\lvert y\rvert$	$x=۲, y=-۳ \Rightarrow \underbrace{\lvert ۲\times(-۳)\rvert}_{\underbrace{\lvert -۶\rvert}_{۶}} \underset{=}{\overset{\checkmark}{=}} \underbrace{\underbrace{\lvert ۲\rvert}_{۲}\times\underbrace{\lvert -۳\rvert}_{۳}}_{۶}$
۲) قدرمطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است. (در صورتی که دو عدد هم‌علامت باشند، رابطهٔ تساوی و اگر مختلف‌العلامت باشند، رابطهٔ کوچک‌تری برقرار است.)	$\lvert x+y\rvert\le\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ $(xy\ge ۰ \Rightarrow \lvert x+y\rvert=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)$ $(xy< ۰ \Rightarrow \lvert x+y\rvert<\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)$	$x=-۱, y=۲ \Rightarrow \underbrace{\lvert -۱+۲\rvert}_{\underbrace{\lvert ۱\rvert}_{۱}} \underset{<}{\overset{\checkmark}{\le}} \underbrace{\underbrace{\lvert -۱\rvert}_{۱}+\underbrace{\lvert ۲\rvert}_{۲}}_{۳}$ $x=-۴, y=-۳ \Rightarrow \underbrace{\lvert -۴-۳\rvert}_{\underbrace{\lvert -۷\rvert}_{۷}} \underset{=}{\overset{\checkmark}{\le}} \underbrace{\underbrace{\lvert -۴\rvert}_{۴}+\underbrace{\lvert -۳\rvert}_{۳}}_{۷}$
۳) جذر هر عدد نامنفی، عددی نامنفی است.	$\sqrt{x^۲}=\lvert x\rvert$	$x=۳ \Rightarrow \underbrace{\sqrt{۳^۲}}_{\underbrace{\sqrt{۹}}_{۳}} \underset{=}{\overset{\checkmark}{=}} \underset{۳}{\lvert ۳\rvert}$ $x=-۴ \Rightarrow \underbrace{\sqrt{(-۴)^۲}}_{\underbrace{\sqrt{۱۶}}_{۴}} \underset{=}{\overset{\checkmark}{=}} \underset{۴}{\lvert -۴\rvert}$

۷ توجه کنید تساوی $\lvert x\rvert=\sqrt{x^۲}$ را با $\lvert x\rvert=\sqrt{x}^{\,۲}$ اشتباه نکنید. زیرا تساوی دوم فقط به ازای $x\ge ۰$ درست است و برای $x<۰$، $\sqrt{x}^{\,۲}$ یک عبارت غیر قابل قبول است. (اعداد منفی جذر ندارند.)

مثال **حاصل عبارت روبه‌رو را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.** (امتحان هماهنگ کشوری ـ خرداد ۱۴۰۳)

$$\sqrt{(\sqrt{۲}-۲)^۲}$$

پاسخ طبق ویژگی $\sqrt{x^۲}=\lvert x\rvert$ داریم:

$$\sqrt{(\sqrt{۲}-۲)^۲}=\lvert \underbrace{\sqrt{۲}-۲}_{\underbrace{\sqrt{۴}-۲}_{\text{منفی}}} \rvert=-\underbrace{(\sqrt{۲}-۲)}=-\sqrt{۲}+۲$$

مثال **سادهٔ‌شدهٔ عبارت $\lvert ۲\sqrt{۳}-۱\rvert+\lvert\sqrt{۳}-۱\rvert\times\lvert ۱-\sqrt{۳}\rvert$ کدام است؟** (نمونه دولتی ـ اردبیل و آذربایجان غربی ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)

۱) -۱ ۲) $۴\sqrt{۳}-۵$ ۳) ۳ ۴) $۱۱-۵\sqrt{۳}$

پاسخ گزینهٔ (۳)

$$\lvert \underbrace{۲\sqrt{۳}-۱}_{\text{علامت}+} \rvert=۲\sqrt{۳}-۱$$

$$\lvert\sqrt{۳}-۱\rvert\times\underbrace{\lvert ۱-\sqrt{۳}\rvert}_{\underbrace{\lvert -(\sqrt{۳}-۱)\rvert}_{\lvert\sqrt{۳}-۱\rvert}} \overset{\text{ویژگی۱}}{=\!=} \lvert(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}-۱)\rvert=\lvert(\underbrace{\sqrt{۳}-۱}_{\text{همواره}+})^۲\rvert=(\sqrt{۳}-۱)^۲=۳-۲\sqrt{۳}+۱=۴-۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \lvert ۲\sqrt{۳}-۱\rvert+\lvert\sqrt{۳}-۱\rvert\times\lvert ۱-\sqrt{۳}\rvert=\cancel{۲\sqrt{۳}}-۱+۴-\cancel{۲\sqrt{۳}}=۳$$

مثال **اگر $۲<x<۳$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{(x-۳)^۲}+|۵-x|-|۲x-۱|$ کدام است؟** (نمونه دولتی ـ قم ـ ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱)

۱) $۴x-۹$ ۲) $۹-۴x$ ۳) $۲x-۱$ ۴) $-۲x-۱$

پاسخ گزینهٔ (۲) – برای تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق می‌توانیم برای x با شرط $۲<x<۳$، یک مقدار دلخواه در نظر بگیریم؛ مثلاً $x=۲/۵$.

$$\sqrt{(x-۳)^۲}=|x-۳|=\underbrace{-(x-۳)}=-x+۳$$

$۲/۵-۳$

علامت −

در منفی ضرب کردیم

$$|۵-x|=\underbrace{۵-x}$$

$۵-۲/۵$

علامت +

خود عبارت داخل قدرمطلق

$$|۲x-۱|=\underbrace{۲x-۱}$$

$۲\times ۲/۵-۱$

علامت +

خود عبارت داخل قدرمطلق

فراموش نشود

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲}+|۵-x|-|۲x-۱|=\underbrace{-x+۳+۵-x}_{۸-۲x}\underbrace{-(۲x-۱)}_{-۲x+۱}=۹-۴x$$

توجه کنید عدد $x=۲/۵$ در فاصلهٔ $۲<x<۳$ را فقط برای تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق استفاده می‌کنیم و در محاسبات اصلی آن را به جای x قرار نمی‌دهیم و جواب نهایی را برحسب x به دست می‌آوریم.

استدلال

۱) تعریف: استدلال یعنی دلیل‌آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم‌کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

۲) روش استدلال‌کردن
- ۱) استفاده از حواس پنج‌گانه و تجربه‌های گذشته
- ۲) استفاده از اصول، تعریف‌ها و قضیه‌ها

۳) در برخی از موارد برای اثبات مسئله‌ها از مشاهده‌کردن و حواس پنج‌گانه بهره می‌بریم اما نمی‌توانیم به تنهایی با استفاده از این روش به نتیجهٔ درست و قطعی برسیم. مثلاً این‌که شخصی با مشاهدهٔ سفیدبودن رنگ ماشین‌های پارک‌شده در یک کوچه به این نتیجه برسد که تمام ماشین‌های اهالی آن کوچه سفیدرنگ است، یک استدلال نامعتبر است، زیرا بر پایهٔ تعداد محدودی مشاهده است و اهالی کوچه ماشین‌های زیادی با رنگ‌های دیگر هم دارند.

۴) مثال نقض: هرگاه بخواهیم نادرستی یک گزاره را ثابت کنیم، می‌توانیم یک مثال دلخواه بیاوریم که آن گزاره را رد می‌کند.

مثال **کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟** *(نمونه دولتی ـ اردبیل و آذربایجان غربی ـ ۱۴۰۲-۱۴۰۱)*

۱) در هر مثلث دلخواه، محل برخورد ارتفاع‌ها، همواره نقطه‌ای داخل مثلث است.

۲) در هر مثلث دلخواه، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی همواره نقطه‌ای داخل مثلث است.

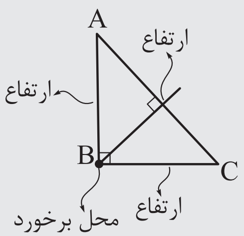
۳) هر مربع دلخواه نوعی لوزی است.

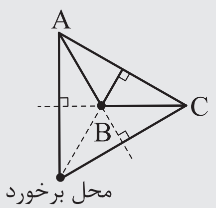
۴) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲، حتماً عددی فرد است.

پاسخ گزینهٔ (۱)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نادرست است. مثال نقض: در مثلث‌هایی که یک زاویهٔ باز یا قائمه دارند، به ترتیب محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث یا روی یک رأس مثلث است.





گزینهٔ (۲): درست است. نیمساز زاویه‌های داخلی؛ آن زاویه‌ها را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، بنابراین حتماً داخل مثلث با هم برخورد دارند.

گزینهٔ (۳): درست است. می‌دانیم لوزی یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع برابر است و چون مربع یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع برابر و زاویه‌های قائمه است، پس هر مربع یک لوزی است.

گزینهٔ (۴): درست است. می‌دانیم تنها عدد اول زوج، ۲ است، پس هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲، فرد است.

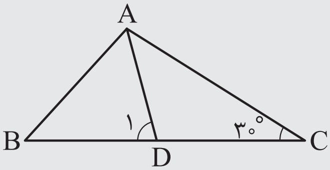
– آشنایی با اثبات در هندسه –

۱) اثبات: به استدلالی که براساس مفاهیم و تعاریف ریاضی و دانسته‌های قبلی بوده و موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد، اثبات می‌گوییم.

۲) فرض و حکم مسئله: به اطلاعات مسئله، فرض (داده) و خواستهٔ مسئله، حکم می‌گوییم.

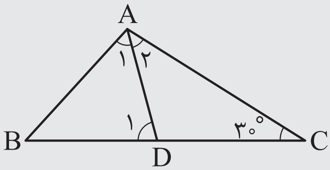
۳) در روند استدلال از اطلاعات مسئله (فرض) و حقایق و اصولی که درستی آن‌ها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

مثال **در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A است و $AB = AD$ می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ D_1 چند درجه است؟** (نمونه دولتی ـ یزد ـ ۱۴۰۲-۱۴۰۱)



۱) ۶۵ ۲) ۷۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ (۲)



فرض : $\begin{cases} \text{است } \hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2\hat{A}_1 \\ AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 \end{cases}$

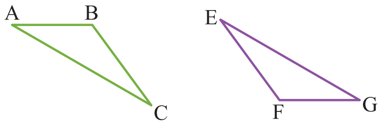
مجموع زوایای داخلی مثلث ABC، 180° است. $\Rightarrow 2\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=30^\circ} 2\hat{A}_1 + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ$

مجموع زوایای داخلی مثلث ABD، 180° است. $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{D}_1} \hat{A}_1 + 2\hat{B} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\hat{A}_1 + \hat{B} = 150^\circ \\ \hat{A}_1 + 2\hat{B} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = 40 \ , \ \hat{B} = 70^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{D}_1} \hat{D}_1 = 70^\circ$$

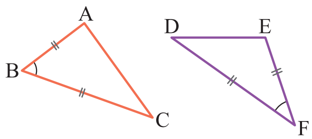
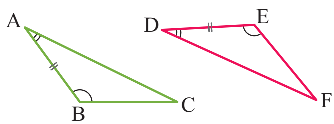
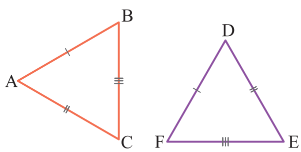
هم‌نهشتی مثلث‌ها

۱ یادآوری مفهوم هم‌نهشتی: اگر بتوانیم شکلی را با استفاده از یک یا چند تبدیل در صفحه بر شکل دیگری منطبق کنیم، می‌گوییم این دو شکل با هم، هم‌نهشت (مساوی) هستند. برای نشان‌دادن هم‌نهشتی دو شکل از علامت « $\cong$ » استفاده می‌کنیم. هرگاه دو شکل هم‌نهشت باشند، اجزای متناظر، دوبه‌دو با هم برابر می‌شوند. مثلاً اگر دو مثلث زیر، هم‌نهشت باشند، داریم:

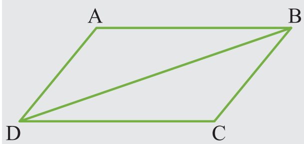


$$\begin{cases} AB = FG \ , \ BC = EF \ , \ AC = EG \\ \hat{A} = \hat{G} \ , \ \hat{B} = \hat{F} \ , \ \hat{C} = \hat{E} \end{cases}$$

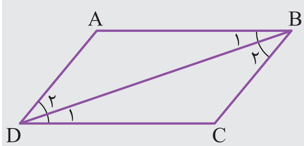
۲ هم‌نهشتی مثلث‌ها: برای اثبات هم‌نهشتی هر دو مثلث دلخواه، سه حالت وجود دارد.

	توضیح کلامی	شکل	بیان ریاضی
۱	اگر دو ضلع و زاویهٔ بین یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین مثلث دیگری با هم برابر باشند، می‌گوییم به حالت دو ضلع و زاویه بین، با هم، هم‌نهشت‌اند.		$\begin{cases} AB = EF \\ BC = DF \\ \hat{B} = \hat{F} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$
۲	اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین مثلث دیگری برابر باشند، می‌گوییم به حالت دو زاویه و ضلع بین، با هم، هم‌نهشت‌اند.		$\begin{cases} AB = DE \\ \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$
۳	اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشد، می‌گوییم به سه حالت ضلع با هم، هم‌نهشت‌اند.		$\begin{cases} AB = FD \\ AC = DE \\ BC = FE \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$

مثال ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل همواره برابرند. *(امتحان هماهنگ البرز ـ شهریور ۱۴۰۱)*



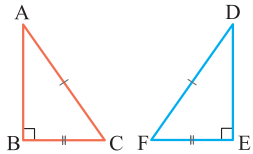
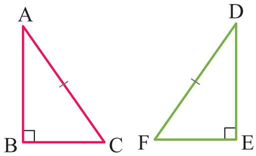
پاسخ



$$\begin{cases} AB \parallel CD \, , \, \text{مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \, , \, \text{مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ \text{ضلع مشترک } BD = BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD}$$

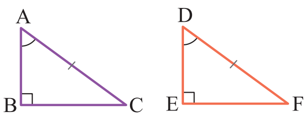
از هم‌نهشتی مثلث‌ها نتیجه می‌شود که اجزای متناظر برابرند، پس $AB = CD$ و $AD = BC$.

۳ همنهشتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه: برای اثبات همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم از حالت‌های زیر استفاده کنیم.

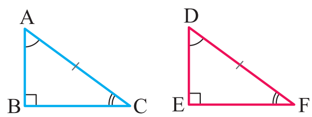
	توضیح کلامی	شکل	بیان ریاضی
۱	اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری برابر باشند، می‌گوییم دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند.		$\begin{cases} AC = DF \\ BC = EF \end{cases} \xrightarrow{(وض)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$
۲	اگر وتر و یک زاویهٔ تند مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویهٔ تند مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری برابر باشند، می‌گوییم دو مثلث به حالت وتر و یک زاویهٔ تند، هم‌نهشت‌اند.		$\begin{cases} AC = DF \\ \hat{A} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{(وز)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$

۴ اگر دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع با هم، هم‌نهشت باشند، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ضلع سوم دو مثلث نیز برابر است، یعنی حالت وتر و یک ضلع در حقیقت همان حالت سه ضلع است.

۵ اگر دو مثلث به حالت وتر و یک زاویهٔ تند، با هم، هم‌نهشت باشند، با توجه به برابری زاویه‌های قائمه، نتیجه می‌شود که زاویهٔ تند دیگر دو مثلث هم با هم برابرند، پس حالت وتر و یک زاویهٔ تند، همان حالت دو زاویه و ضلع بین است.

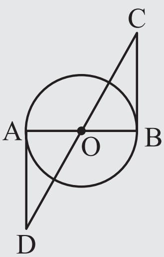


(و ز)



(ز ض ز)

مثال در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس هستند. *(امتحان هماهنگ یزد ـ خرداد ۱۴۰۲)*



نشان دهید: $\overset{\Delta}{AOD} \cong \overset{\Delta}{BOC}$

جای خالی را کامل کنید: .... = AD

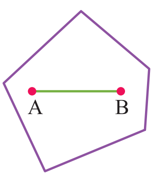
$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \Leftarrow$ شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

$\widehat{COB} = \widehat{AOD}$ زوایای متقابل به رأس هستند.

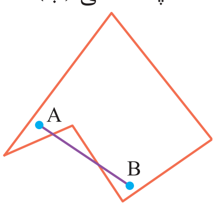
$OA = OB$ شعاع دایره هستند.

$\xrightarrow{(ز ض ز)} \overset{\Delta}{AOD} \cong \overset{\Delta}{BOC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AD = BC$

۶ تعریف چندضلعی محدب: یک چندضلعی را محدب می‌گوییم، هرگاه هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواه درون شکل را به هم وصل کند، به طور کامل درون چندضلعی قرار بگیرد. مثلاً در شکل‌های زیر، چندضلعی (الف) محدب است، اما چندضلعی (ب) محدب نیست.



(الف)



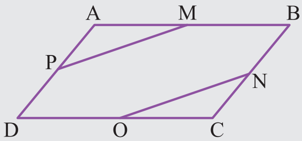
(ب)

– حل مسئله در هندسه –

در یک مسئله ممکن است به طور مستقیم از ما خواسته نشده باشد که هم‌نهشتی دو مثلث را اثبات کنیم، اما می‌بینیم که برای رسیدن به خواستهٔ مسئله می‌بایست ابتدا هم‌نهشتی دو مثلث را ثابت کرده و سپس از طریق برابر قرار دادن اجزای متناظر در دو مثلث، حکم را ثابت کنیم.

مثال **ABCD متوازی‌الاضلاع و نقاط M، N، O و P وسط اضلاع آن هستند. ثابت کنید MP = ON .**

(هماهنگ استانی ـ خوزستان خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \xrightarrow{\text{M و O وسط AB و CD است.}} AM = CO \\ AD = BC \Rightarrow \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \xrightarrow{\text{P و N وسط AD و BC است.}} AP = CN \end{cases}$$

اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AM = CO \\ AP = CN \\ \hat{A} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنابه حالت (ض‌زض)}} \overset{\Delta}{AMP} \cong \overset{\Delta}{CNO} \xrightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} MP = ON$$

$\hat{A} = \hat{C}$ زاویه‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند.

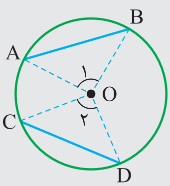
مثال **در اثبات «در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها با هم برابرند.» از کدام حالت هم‌نهشتی استفاده شده است؟**

(نمونه دولتی ـ البرز و قزوین ـ ۱۴۰۱–۱۴۰۰)

۱) (ض ز ض) ۲) (ز ض ز) ۳) (ض ض ض) ۴) (ض ز ض) و (ض ض ض)

پاسخ گزینهٔ (۱)

فرض : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ حکم : $AB = CD$



از مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم. حال ثابت می‌کنیم مثلث‌های OAB و OCD هم‌نهشت هستند. در پایهٔ هشتم آموختیم اگر دو کمان مساوی باشند، زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به آن‌ها نیز برابر است، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD \text{ شعاع دایره} \\ OB = OC \text{ شعاع دایره} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow AB = CD$$

دو شکل متشابه:

دو شکل متشابه: دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه‌ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می‌گویند.

نکته: دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته: دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته: دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه‌ها دو به دو برابر نباشند)

نکته: نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می‌گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آنها عدد یک است.

نکته: در دو مثلث متشابه :

الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.

فصل چهارم

(توان و ریشه)

توان : اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

مانند : $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{بار}} = a^n$

$۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$ توان پایه

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^۷ \times ۴^۳ = ۴^{۱۰}$ $\qquad a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^۷ \times ۳^۷ = ۳۶^۷$ $\qquad a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^۵}{۹^۳} = ۹^۲$ $\qquad a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^۸ \div ۴^۸ = ۵^۸$ $\qquad a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $۹^۲ \div ۲۷ = \overset{۳^۴}{\cancel{(۳^۲)^۲}} \div ۳^۳ = ۳$ تجزیه $\qquad ۴^۸ \times ۲^۳ = \overset{۲^{۱۶}}{\cancel{(۲^۲)^۸}} \times ۲^۳ = ۲^{۱۹}$ تجزیه

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^۵ + ۹^۵ + ۹^۵ = ۳ \times ۹^۵ = ۳ \times \overset{۳^{۱۰}}{\cancel{(۳^۲)^۵}} = ۳^{۱۱}$ تجزیه $\qquad ۲^۶ + ۲^۶ = ۲ \times ۲^۶ = ۲^۷$ تعداد اعداد

توان منفی : برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود. $\qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

نکته : تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته : اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$۳^{-۴} \times ۳^۲ \div ۲۷ = \overset{۳^{-۲}}{\cancel{۳^{-۴} \times ۳^۲}} \div ۳^۳ = ۳^{-۵} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵$ $\qquad ۵^{-۶} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۶$

$\frac{۴^۷ \times ۳^{-۶}}{۳^۳ \times ۴^{-۲}} = \frac{۴^۷ \times ۴^۲}{۳^۳ \times ۳^۶} = \frac{۴^۹}{۳^۹} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۹$ $\qquad \frac{۲۰^{-۶}}{۵^۲ \times ۴^{-۶}} = \frac{۵^{-۶}}{۵^۲} = ۵^{-۸} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۸$

فصل چهارم

(توان و ریشه)

نکته : هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال : حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$۳^{۲} + ۵^{۰} - ۲^{-۲} = \overset{۱۰}{\cancel{۹ + ۱}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۱}{۴} = \frac{۳۹}{۴} = ۹\frac{۳}{۴}$$

نماد علمی : برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته : به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^{n}$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$ و nعدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت) : ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

۴ رقم

$$۱۴۷۵۲/۹۳ = ۱/۴۷۵۲۹۳ \times ۱۰^{۴}$$

۸ رقم

$$۳۴۱۰۰۰۰۰۰ = ۳/۴۱ \times ۱۰^{۸}$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی) : ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۰/۰۰۶۷۸ = ۶/۷۸ \times ۱۰^{-۳}$$

۶ رقم

$$۰/۰۰۰۰۰۳۷ = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$۵۳۰۰۰۰ \times ۰/۰۰۰۲۷ = \underline{۵/۳} \times \underline{\underline{۱۰^{۵}}} \times \underline{۲/۷} \times \underline{\underline{۱۰^{-۴}}} = ۱۴/۳۲ \times ۱۰^{۱} = ۱/۴۳۲ \times ۱۰^{۲}$$

ریشه گیری : الف) ریشه دوم اعداد : هر عدد دارای دو ریشه دوم است : (یکی مثبت و دیگری منفی)

مانند : (ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و ۴-)

$$۴^{۲} = (-۴)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۱۶} = ۴ \text{ و } -۴$$

نکته : اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد : هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

مانند :

$$(-۳)^{۳} = -۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \quad \text{و} \quad ۳^{۳} = ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

مثال : حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$۴\sqrt[۳]{-۱۲۵} = ۴ \times -۵ = -۲۰$$

$$\sqrt{۶۴ \times \frac{۱}{۹}} = ۸ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۰۱} \times \sqrt{\sqrt{۱۶}} = ۰/۱ \times ۲ = ۰/۲$$

$$\sqrt{۶۴} \times \sqrt[۳]{-۶۴} = ۸ \times -۴ = -۳۲$$

فصل چهارم

(توان و ریشه)

ضرب و تقسیم رادیکال ها : اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته : اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\sqrt[3]{-۲} \times \sqrt[3]{۳۲} = \sqrt[3]{-۶۴} = -۴$$

$$۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۱۶} = ۲ \times ۴ = ۸$$

$$۹\sqrt[3]{۵۴} \div ۳\sqrt[3]{۲} = ۳\sqrt[3]{۲۷} = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$۸\sqrt{۵۰} \div ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲۵} = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

ساده کردن رادیکال ها : بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد ، یک ضربی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

مانند :

$$\sqrt[3]{۸۱} = \sqrt[3]{۳ \times \underset{\text{ریشه سوم}}{۲۷}} = ۳\sqrt[3]{۳}$$

$$\sqrt[3]{۱۲۸} = \sqrt[3]{۲ \times \underset{\text{ریشه سوم}}{۶۴}} = ۴\sqrt[3]{۲}$$

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{\underset{\text{ریشه دوم}}{۴} \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جمع و تفریق رادیکال ها : اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

مانند :

$$۵\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۵}$$

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۲\sqrt{۲} - \sqrt{۷۵} - ۳\sqrt{۷۲} + ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۲} - \overset{-۵\sqrt{۳}}{\cancel{\sqrt{۳ \times ۲۵}}} - \overset{-۱۸\sqrt{۲}}{\cancel{۳\sqrt{۲ \times ۳۶}}} + ۴\sqrt{۳} = -۱۶\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۸} + ۳\sqrt[3]{-۵۴} + \sqrt[3]{۱۶} - ۲\sqrt{۸} = \overset{۳\sqrt{۲}}{\cancel{\sqrt{۲ \times ۹}}} + \overset{-۹\sqrt[3]{۲}}{\cancel{۳\sqrt[3]{۲ \times -۲۷}}} + \overset{+۲\sqrt[3]{۲}}{\cancel{\sqrt[3]{۲ \times ۸}}} - \overset{-۴\sqrt{۲}}{\cancel{۲\sqrt{۲ \times ۴}}} = -\sqrt{۲} - ۷\sqrt[3]{۲}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی : گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

مانند :

$$\frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲ \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}\sqrt{۲}}{\underset{۳}{\cancel{۶}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳ \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار توان را از فرجه کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

مانند :

$$\frac{۱}{\sqrt[3]{a^۲}} = \frac{۱ \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^۲} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^۳}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

$$۳ - ۲ = ۱$$

$$\sqrt[3]{\frac{۳}{۷}} = \frac{\sqrt[3]{۳}}{\sqrt[3]{۷}} = \frac{\sqrt[3]{۳} \times \sqrt[3]{۷^۲}}{\sqrt[3]{۷} \times \sqrt[3]{۷^۲}} = \frac{\sqrt[3]{۱۴۷}}{\sqrt[3]{۷^۳}} = \frac{\sqrt[3]{۱۴۷}}{۷}$$

$$۳ - ۱ = ۲$$